

Théorie des jeux et planète terre

Contribution Sylvain Sorin

Présentons quelques thèmes liés à la théorie des jeux vue comme analyse de situations d'interaction stratégique en particulier en terme de complexité et d'évolution.

1. Domaines d'application

En simplifiant beaucoup, on peut définir deux grands types de formalisation en termes de jeux stratégiques.

- 1.1. Un premier modèle (A) considère des agents rationnels connaissant les caractéristiques de la situation d'interaction (joueurs, stratégies, paiements, information ...). Les exemples typiques sont les problèmes économiques (équilibre général, économie industrielle, commerce international, enchères,...) sociologiques (stabilité des institutions, normes,...) politiques (procédures de vote ...). L'analyse identifie les déductions rationnelles des agents pour en déduire des prédictions sur leur comportement. Une construction similaire s'applique à l'échange d'informations (hiérarchie des croyances, connaissance commune...). Dans le cadre d'interaction répétées, les structures de communication permettent de construire des modes de reconnaissance et des normes de fonctionnement.
- 1.2. Un second paradigme (B) traite d'individus, gènes, cellules, automates, ... en grand nombre, avec éventuellement information partielle et rationalité bornée. La dynamique est générée par l'effet au niveau global de procédures locales d'ajustement ou d'adaptation. Les cadres typiques sont les dynamiques de populations ou l'évolution de la congestion sur un réseau. En général, la dynamique est à temps discret et aléatoire, basée sur une perception partielle de l'environnement et non-anticipative. Un état typique est donné par une population caractérisée par une certaine proportion $x(n)$ de types (dans un ensemble fini). On peut définir par exemples des processus du type :
 - a) "naturels", basés dans les exemples de biologie sur les taux de reproduction des différents types/gènes/comportements dans les multiples interactions aléatoires (dont les lois dépendent de $x(n)$) et agissant par effet de retour sur la composition $x(n+1)$.
 - b) d'imitation ou de comparaison où la propension à changer de comportement dépend du résultat obtenu et de la comparaison avec un autre résultat, une moyenne, un seuil ...
 - c) de re-renforcement où chaque agent utilise une variable d'état autonome pour déterminer la loi de son action et l'actualise au vu du résultat de l'interaction à chaque étape.
- 1.3. Un troisième thème correspond à l'utilisation de méthodes ou d'outils issus de la théorie des jeux dans des situations où il y a interaction avec un environnement variable et difficile à préciser : modèles d'apprentissage, tests robustes, automates et complexité.
- 1.4. Une des conséquences possibles de l'analyse de type 1.1. est de produire un mécanisme inverse de la suite : règles (rules of the game) impliquent résultats. Etant donné des issues souhaitées (en terme d'efficacité, d'égalité, de justice ...), on définit une structure d'interaction (type d'agents, information, actions, déroulement, ...) adaptée telle qu'un déroulement rationnel les génèrent. Ce domaine correspond à la théorie du "mechanism design".
- 1.5. De nombreux phénomènes se modélisent par des modèles intermédiaires entre 1.1. et 1.2. qui sont actuellement en plein développement : Soit en introduisant dans le cadre (A) des aspects de rationalité limitée ou de complexité bornée (au niveau de la mémoire, de l'anticipation ou de la hiérarchie des déductions ...) ou au contraire en partant du modèle (B) et en introduisant des types de comportement plus sophistiqués (avec des actions dépendant d'un état interne (par exemple : test/punition/coopération) ou d'un signal externe : corrélation via des signaux exogènes).

1.6. Notons qu'il est très difficile en pratique d'évaluer la manière dont un agent classe les résultats : sa fonction d'utilité ou sa relation de préférences. Dans de nombreux exemples simples, on identifie résultat et évaluation. Cette pratique est en particulier justifiable dans deux grands domaines d'application :

- ▶ biologie : le résultat d'une interaction est mesuré pour une espèce par son taux de reproduction ("fitness") qui joue le rôle de la grandeur à maximiser.
- ▶ modèle de transport : la congestion est identifiée à un temps de parcours normalisé et correspond au paiement à minimiser.

1.7. L'un des intérêts de la modélisation est d'obtenir des propriétés du modèle indépendantes du domaine d'application et permettant parfois des transferts de procédures et de résultats (par exemple : réplicateur et dynamiques de non regret ...)

2. Outils mathématiques.

2.1. Sur le thème A., il y a une énorme littérature concernant les jeux répétés (supergames) où la même interaction est répétée. Les résultats visent à caractériser l'ensemble des équilibres (Nash, corrélés, communication, ...) en fonction de la structure de communication et de l'évaluation de la suite des résultats. Les développements récents exhibent des codes robustes qui permettent de valider des tests sur les comportements d'équilibre, ou plus précisément sur les signaux que reçoivent les agents. L'un des principaux problèmes est la multiplicité des équilibres et l'analyse rejoint les théories de sélection d'équilibre. Là encore l'une des directions est de considérer des jeux "réduits" (équilibres publics, bornes de complexité ...) et la construction/structure des équilibres fait apparaître des contrats de comportement : émergence de normes sociales.

2.2. À propos des jeux d'évolution (B), les problèmes mathématiques concernent en particulier les points suivants :

- ▶ **Approximation discret /continu.** Cela concerne aussi bien
 - le nombre des agents (passage fini/ non atomique ou fini dénombrable): par exemple impact d'une perturbation (mutation / phénomène de contagion) et passage à la limite quand l'importance ou la perception de la perturbation tend vers 0 (poids d'un agent).
 - l'espace d'états (en terme de proportions de types présents)
 - le temps : passage du temps discret au temps continu (équation aux différences/ODE)

En général les procédures d'approximation sur un intervalle de temps compact (typiquement le nombre d'individus N et le nombre d'interactions par unité de temps croissent au même ordre) permettent de contrôler la (vraie) trajectoire discrète aléatoire par la trajectoire continue de la dynamique déterministe du "champ moyen". Mais l'approximation ne s'étend au comportement asymptotique et dans le cas markovien, on compare à l'étude du comportement limite quand N croît de distributions stationnaires pour les populations de taille N . Ici les 2 passages à la limite ne commutent pas. Il y a des études très fines à faire dans le cas de populations finies avec probabilité d'extinction ou dans le cadre de perturbation aléatoire (voir par exemple les différents modèles de "Stochastic Replicator Dynamics").

- ▶ **Différentes échelles de temps** : la structure du jeu évolue au cours du temps. C'est en particulier le cas lorsque les participants se caractérisent, en plus de leur action ou type, par leur appartenance à un groupe (qui peut être une réaction à un signal, un code ou un mode de comportement spécifique). Il y a alors évolution au niveau microscopique au sein d'une sous population et évolution comparée des sous-populations dans la population totale : par exemple

le taux de croissance d'un type A peut être inférieur au sein d'une sous-population I qu'au sein d'une sous-population II mais AI se reproduit plus vite que AII.

- ▶ **Extensions des possibilités stratégiques** avec délégation et génération de nouveaux participants. L'exemple typique concerne les jeux de congestion ou la masse des participants est donnée mais le résultat en terme de congestion est fonction de la configuration : population non atomique, agents avec stocks divisibles ou non ... En particulier la structure du jeu évolue au cours de l'interaction.
- ▶ **Propriétés asymptotiques des trajectoires.** Par rapport au cadre A, l'analyse ne se limite pas à l'étude de point stationnaires. Il peut y avoir multiplicité d'attracteurs et certaines orbites cycliques dominent des issues stationnaires (instables). En particulier, la comparaison stabilité dynamique/ stationnarité/stabilité "rationnelle" est un domaine de recherche difficile et exigeant. Il est aussi important d'identifier les dynamiques éliminant les stratégies dominées ou satisfaisant des propriétés de persistance.

2.3. Une des difficultés de l'analyse de questions de perturbation/robustesse/stabilité en théorie des jeux est l'apparition de phénomène de dominos ou de boucle : augmenter l'espace de types d'un agent fait également croître l'espace des croyances de ses adversaires.

2.4. Enfin le domaine privilégié d'expérimentation mathématique correspondant à une étude en laboratoire est la théorie générale des jeux répétés à 2 joueurs et à somme nulle. Ce cadre privilégie les hypothèses mathématiques bien définies et considère la situation extrême de conflit pur. On peut alors étudier simultanément les aspects stochastiques de l'interaction, les problèmes d'information incomplète sur l'état, l'impact d'existence de signaux sur les actions. L'analyse étudie en particulier, la robustesse des quantités caractéristiques (maxmin, min max, valeur) en fonction de la durée de l'interaction i.e. l'évaluation de la suite des résultats le long de la trajectoire. Parmi les domaines récents en plein développement on peut souligner le passage en temps continu et le lien avec les jeux différentiels, l'étude du jeu limite et du comportement asymptotique (en fonction de fraction de la durée du jeu) et finalement l'analyse du comportement uniforme.

Signalons également l'existence d'une littérature importante sur les modèles de croissance équilibrée (avec différents agents et des aspects stochastiques) où les développements récents portent sur les questions d'évaluation endogène (et relèvent de question d'optimisation stochastique plus que d'interaction).